

Chapitre 7: Variables aléatoires discrètes

I) Variables aléatoires discrètes:

1) Définition: On appelle variable aléatoire discrète notée X une grandeur numérique qui prend les valeurs $x_1; x_2; \dots; x_n$ avec des probabilités $p_1; p_2; \dots; p_n$

Exemple: On lance un dé à 6 faces bien équilibré.

Un joueur mise 2€, il gagne le double de la valeur du dé si le dé est pair.
il perd sa mise sinon.

on pose X la variable aléatoire qui à chaque lancer associe le gain.

X peut valoir $-2; 2; 6; 10$ donc

$$x_1 = -2 \quad p_1 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = 2 \quad p_2 = \frac{1}{6}$$

$$x_3 = 6 \quad p_3 = \frac{1}{6}$$

$$x_4 = 10 \quad p_4 = \frac{1}{6}$$

Remarque:

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1$$

On a déterminé la loi de notre variable aléatoire X .

2) loi d'une variable aléatoire:

Définition: la loi de probabilité de la variable X est la fonction qui à chaque valeur x_i associe la valeur p_i , $i \in \{1; \dots; n\}$

Remarque En générale la loi de X est donnée sous la forme d'un tableau.

Ex:

valeurs de X : x_i	-2	2	6	10	Total
probabilité $p_i = P(X=x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

Exercice: On tire une carte dans un jeu de 32 cartes au hasard

à chaque type de carte on associe les valeurs suivantes

Roi $\rightarrow$ 4 points

Valet $\rightarrow$ 1 points

Dame $\rightarrow$ 3 points

toutes les autres cartes valent 0.

X est la valeur de la carte tirée, Donner la loi de X .

$X = x_i$	0	1	3	4	Total
$P(X=x_i)$	$\frac{20}{32} = \frac{5}{8}$	$\frac{4}{32} = \frac{1}{8}$	$\frac{4}{32} = \frac{1}{8}$	$\frac{4}{32} = \frac{1}{8}$	1

3) Espérance d'une variable aléatoire: (Moyenne...)

Définition: Soit X une VAD (variable aléatoire discrète) le réel $E(X)$ qui vaut:

$$E(X) = x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + \dots + x_n \times p_n = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

Exemple: 1) lancé de dé:

$$E(X) = -2 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} + 10 \times \frac{1}{6} = \frac{12}{6} = 2 \text{ €}$$

En moyenne un joueur gagne 2€

2) tirage de carte:

$$E(X) = 0 \times \frac{5}{8} + 1 \times \frac{1}{8} + 3 \times \frac{1}{8} + 4 \times \frac{1}{8} = \frac{8}{8} = 1$$

En moyenne la valeur de la carte tirée est 1 point.

4) Variance et écart type d'une variable aléatoire:

Définition: Soit X une VAD d'espérance $E(X)$ on appelle variance de X notée $V(X)$ le nombre positif qui vaut:

$$V(X) = \sum_{i=1}^n [x_i - E(X)]^2 \times p_i$$

et on appelle écart-type le nombre positif. $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Exemple: 1) lancer de dé

$$V(X) = (-2-2)^2 \times \frac{1}{2} + (2-2)^2 \times \frac{1}{6} + (6-2)^2 \times \frac{1}{6} + (10-2)^2 \times \frac{1}{6} = \frac{128}{6} = \frac{64}{3}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{64}{3}} = \frac{8}{\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{3} \approx 4,62$$

2) tirage de carte:

$$V(X) = (0-1)^2 \times \frac{5}{8} + (1-1)^2 \times \frac{1}{8} + (3-1)^2 \times \frac{1}{8} + (4-1)^2 \times \frac{1}{8} = \frac{18}{8} = \frac{9}{4} = 2,25$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} = 1,5$$

5) Propriétés et théorèmes:

a) th de Koenig: $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

Ex: tirage de carte: $\frac{5}{8} \times 0^2 + \frac{1}{8} \times 1^2 + \frac{1}{8} \times 3^2 + \frac{1}{8} \times 4^2 - 1^2 = 2,25$

lancer de dé: $\frac{1}{2} \times (-2)^2 + \frac{1}{6} \times 2^2 + \frac{1}{6} \times 6^2 + \frac{1}{6} \times 10^2 - 2^2 = \frac{128}{6} = \frac{64}{3}$



6) Propriétés:

* X et l'écart-type sont exprimés dans la même unité.

* $E(X)$ est linéaire.

$$E(aX+b) = aE(X) + b$$

* $V(X)$ et $\sigma(X)$ ne le sont pas.

$$V(aX+b) = a^2 V(X)$$

$$\sigma(aX+b) = |a| \sigma(X)$$

ex: valeur absolue:

$$|-3| = 3$$

$$|+3| = 3$$

II) lois Fondamentales:

1) Loi de Bernoulli

Définition: Une expérience de Bernoulli est une expérience aléatoire qui n'a que 2 issues le succès de probabilité p et l'échec de probabilité $q=1-p$.

Soit X la VAD qui vaut 1 pour le succès et 0 pour l'échec

la loi de X est appelée loi de Bernoulli

$X=x_i$	1	0
$P(X=x_i)$	p	$1-p$

on note $X \sim \mathcal{B}(p)$

Exemple: On lance un dé bien équilibré, on appelle succès l'événement "obtenir 6"

Donner la loi de X .

X suit une loi de Bernoulli de paramètre

$$p = P(\text{"succès"}) = P(\text{"obtenir 6"}) = \frac{1}{6}$$

$X=x_i$	1	0
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$

↳ Notation: $X \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{6}\right)$

Caractéristiques: $X \sim \mathcal{B}(p)$

$$* E(X) = 1 \times p + 0 \times (1-p) = p$$

$$* V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 1^2 \times p + 0^2 \times (1-p) - p^2 = p - p^2$$

$$V(X) = p \times (1-p)$$

$$* \sigma(X) = \sqrt{p \times (1-p)}$$

Exemple $V(X) = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{36}$

$\sigma(X) = \sqrt{\frac{5}{36}} = \frac{\sqrt{5}}{6}$

2) loi binomiale

Si on répète (n) épreuves de Bernoulli de même paramètre (p) de manière indépendante, et que X est la variable aléatoire discrète qui compte le nombre de succès.

Alors X suit une loi binomiale de paramètres n et p telle que:

$k \in \{0, \dots, n\}; P(X=k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$

on note $X \sim B(n; p)$

Exemple: On lance 2 fois un dé bien équilibré.

X est la variable aléatoire qui compte le nombre de 6 obtenu.

Donner la loi de X .

⊛ Expérience de Bernoulli: On lance un dé, le succès est l'apparition d'un 6.

$P(\text{"succès"}) = \frac{1}{6}$

⊛ Répétition: On répète 2 fois cette expérience aléatoire de manière indépendante.

⊛ Compteur: X est la variable aléatoire qui compte le nombre de succès.

Ponc $X \sim B(2; \frac{1}{6})$

$X=x_i$	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$

Remarque: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 1$

$P(X=0) = \binom{2}{0} \times \left(\frac{1}{6}\right)^0 \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{36}$

$\underset{1}{\parallel}$ $\underset{1}{\parallel}$ $\frac{25}{36}$

$$P(X=1) = \binom{2}{1} \times \left(\frac{1}{6}\right)^1 \times \left(\frac{5}{6}\right)^1 = \frac{10}{36}$$

$$P(X=2) = \binom{2}{2} \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(\frac{5}{6}\right)^0 = \frac{1}{36}$$

Exemple: Une usine produit des billes pour des roulements chaque bille doit avoir un diamètre compris entre $[7,99; 8,01]$ mm.

Ces billes sont produites sur 2 lignes - l'une située au Nord de l'usine l'autre au Sud. Les particularités de machines ont amené à technicien supérieur à faire ces ajustements:

La ligne Nord produit 40% des billes dont 4 % sont défectueuses -

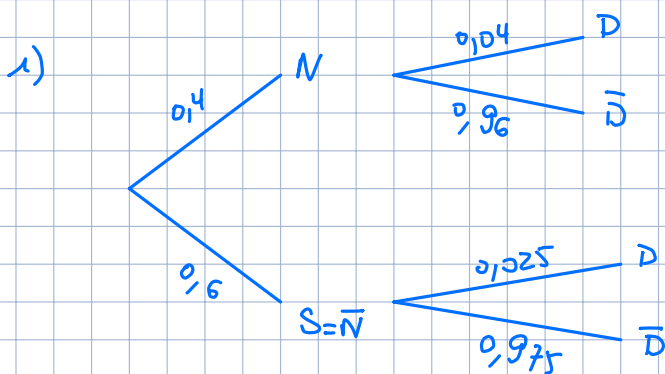
La ligne Sud produit le reste des billes donc 60% sont défectueuses -

1) On prélève une bille dans la production, quelle est la probabilité qu'elle soit défectueuse?

2) On prélève 20 billes au hasard, on appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de billes défectueuses dans cet échantillon -
(on assimile ce tirage à un tirage avec remise)

a) Quelle est la loi de X

b) Quelle est la probabilité de prélever exactement 5 billes défectueuses -



$$P(D) = 0,4 \times 0,04 + 0,6 \times 0,025 = 0,031 = 3,1 \%$$

2) a) Epreuve de Bernoulli: On prélève 1 bille on regarde si elle est défectueuse (succès)

$$P(\text{"succès"}) = P(\text{"la bille est défectueuse"}) = 0,031 = p$$

Répétition: On répète 20 fois ($n=20$) cette épreuve de manière indépendante (tirage avec remise)

Compteur: X compte le nombre de succès donc $X \sim B(20; 0,031)$
Loi binomiale -

b) $P(X=5) \approx 2,8 \times 10^{-4} \approx 0,00028$

Remarque: Sous certaines conditions, on peut approcher la loi binomiale par une loi de Poisson.

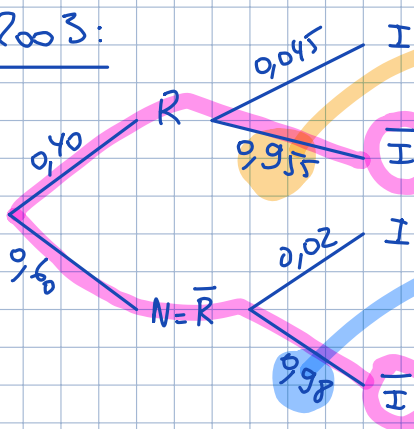
on note $Y \sim P(\lambda)$ et $P(Y=k) = \frac{e^{-\lambda} \times \lambda^k}{k!}, k \in \mathbb{N}$

Pour faire cette approximation on doit prendre $\lambda = n \times p$.

lambda
 λ

BTS : 2003:

(A)



1) a) $P_R(\bar{I}) = 0,955$

b) $P_N(\bar{I}) = 0,98$

c) $P(\bar{I}) = 0,4 \times 0,955 + 0,6 \times 0,98 = 0,97$

2) a) Epreuve de Bernoulli: On prélève une bille on regarde si elle est utilisable
 $P(\bar{I}) = 0,97$

Répétitions: On répète 10 fois cette épreuve de manière indépendante (tirage avec remise)
($n=10$)

Compteur: X compte le nombre de succès donc $X \sim B(10; 0,97)$

b) $P(X \geq 9)$ $\approx 0,97$ à 10^{-2} près. (NW)

"neuf au moins soient utilisables" = 9 ou 10 = " $X \geq 9$ "
 $\hookrightarrow (X \geq 9)$ est l'événement contraire ($X \leq 8$)



(TI) $P(X \geq 9) = 1 - P(X \leq 8)$

$= 1 - \text{binomfrep}(10, 0,97, 8)$
 $\approx 0,97$ à 10^{-2} près

(TI)

$P(X = \dots) \rightarrow$ 2nd distrib $\rightarrow$ binomfcp

$P(X \leq \dots) \rightarrow$ 2nd distrib $\rightarrow$ binomfrep

3) $Y \sim \mathcal{B}(100; 0,03)$

a) On approche la loi $\mathcal{B}(100; 0,03)$ par une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$
avec son paramètre $\lambda = n \times p = 100 \times 0,03 = 3$

donc $Y \sim \mathcal{P}(3)$

b) $P(Y \leq 1) \approx 0,20$

"moins de deux" = $Y \leq 1$

