

Chapitre 7: Equations différentielles linéaires

du 1^{er} ordre à coefficients constants -

dérivée
de $y(x)$
sur $I \subset \mathbb{R}$

$$a y'(x) + b y(x) = c(x)$$

$a \neq 0 \quad b \neq 0$

$c(x)$ fonction de $I \subset \mathbb{R}$

Exemple:

$$3 y'(x) + 2 y(x) = 8 \quad (E)$$

$$\text{Soit } f_0(x) = 5e^{-\frac{2}{3}x} + 4$$

$$f_1(x) = 4$$

$$f_2(x) = -2e^{-\frac{2}{3}x} + 4$$

je vérifie que f_0 , f_1 et f_2 sont des solutions de (E)

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad f_0(x) &= 5e^{-\frac{2}{3}x} + 4 \\ f_0'(x) &= 5 \times \left(-\frac{2}{3}\right) e^{-\frac{2}{3}x} \\ &= -\frac{10}{3} e^{-\frac{2}{3}x} \end{aligned}$$

$(e^{ax})' = a e^{ax}$

je remplace dans (E):

$$\begin{aligned} 3 \times f_0'(x) + 2 f_0(x) &= 3 \times \left(-\frac{10}{3}\right) e^{-\frac{2}{3}x} + 2 \times (5e^{-\frac{2}{3}x} + 4) \\ &= -10 e^{-\frac{2}{3}x} + 10 e^{-\frac{2}{3}x} + 8 \\ &= 8 \quad \text{donc } f_0 \text{ est solution de (E)} \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \quad f_1(x) = 4 \quad f_1'(x) = 0$$

je remplace dans (E):

$$\begin{aligned} 3 \times f_1'(x) + 2 \times f_1(x) &= 3 \times 0 + 2 \times 4 \\ &= 8 \quad \text{donc } f_1 \text{ est solution de (E).} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad f_2(x) &= -2e^{-\frac{2}{3}x} + 4 \\ f_2'(x) &= -2 \times \left(-\frac{2}{3}\right) e^{-\frac{2}{3}x} = \frac{4}{3} e^{-\frac{2}{3}x} \end{aligned}$$

je remplace dans (E):

$$\begin{aligned} 3 \times f_2'(x) + 2 f_2(x) &= 3 \times \left(\frac{4}{3}\right) e^{-\frac{2}{3}x} + 2 \times (-2e^{-\frac{2}{3}x} + 4) \\ &= 4 e^{-\frac{2}{3}x} - 4 e^{-\frac{2}{3}x} + 8 \\ &= 8 \quad \text{donc } f_2 \text{ est solution de (E)} \end{aligned}$$

l'équation $3 y' + 2 y = 8$ admet une infinité de solutions

(*) Méthodologie de résolution:

Etape 1 : Résoudre l'équation sans second membre

$$a y' + b y = 0 \quad (E_0)$$

Etape 2: On cherche une solution particulière de l'équation avec 2nd membre

$$a y' + b y = c(x) \quad (E)$$

Etape 3: On détermine l'ensemble des solutions de (E)

Etape 4: On détermine la solution qui respecte une condition initiale

(I) Résolution de l'équation sans second membre (E₀) $a y' + b y = 0$

* Cas particulier: $y(x) = 0$ est une solution triviale $y'(x) = 0$

$$a \times 0 + b \times 0 = 0.$$

* On cherche donc une fonction qui n'est jamais nulle, $\forall x \in \mathbb{R}, y(x) \neq 0$

$$\forall x \in \mathbb{R}, a y'(x) + b y(x) = 0$$

$$a y'(x) = -b y(x), \quad a \neq 0$$

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = \frac{-b}{a}, \quad y(x) \neq 0$$

supposons $y(x) > 0$, $\ln(y(x)) = \frac{-b}{a}x + C$ (en intégrant)
C.R.

exp $\downarrow$

$$y(x) = e^{-\frac{b}{a}x + C}$$

$$y(x) = k e^{-\frac{b}{a}x}, \quad k \in \mathbb{R}$$

théorème: Soient $a \neq 0, b \neq 0$ et y strictement positive on a:

(E₀) $a y' + b y = 0$; $y_0(x) = K e^{-\frac{b}{a}x}, K \in \mathbb{R}^+$ est la solution générale de (E₀)

Exemple: Trouver toutes les solutions des équations suivantes:

$$2y' + 3y = 0$$

$$a=2 \quad b=3$$

$$y_0(x) = K e^{-\frac{3}{2}x}, K \in \mathbb{R}$$

$$5y' - y = 0$$

$$a=5 \quad b=-1$$

$$y_0(x) = K e^{-\frac{1}{5}x} = K e^{\frac{1}{5}x}, K \in \mathbb{R}$$

$$-3y' + \frac{1}{4}y = 0$$

$$a=-3 \quad b=\frac{1}{4}$$

$$y_0(x) = K e^{-\frac{1}{12}x} = K e^{\frac{1}{12}x}, K \in \mathbb{R}$$

II - Recherche de la solution particulière avec 2nd membre: (E) $ay' + by = c(x)$

a) $c(x)$ est constant: On cherche la solution particulière sous la forme

↓ une constante: On pose $g(x) = k$, $k \in \mathbb{R}$

On remplace dans (E), $g'(x) = 0$

Exemple:

$$(E) \quad 2y' + 3y = -9$$

$$\text{Je pose } g(x) = k$$

$$g'(x) = 0$$

Je remplace dans (E)

$$2 \times g'(x) + 3 \times g(x) = -9$$

$$2 \times 0 + 3 \times k = -9$$

$$3 \times k = -9$$

$$k = -\frac{9}{3}$$

$$k = -3$$

donc $g(x) = -3$ est une solution particulière de (E).

$$(E) \quad 5y' - y = 8$$

$$\text{Je pose } g(x) = k$$

$$g'(x) = 0$$

Je remplace dans (E)

$$5 \times g'(x) - g(x) = 8$$

$$5 \times 0 - k = 8$$

$$-k = 8$$

$$k = -8$$

$$\text{donc } g(x) = -8$$

est une solution particulière de (E)

$$(E) \quad -3y' + \frac{1}{4}y = \frac{2}{5}$$

$$\text{Je pose } g(x) = k$$

$$g'(x) = 0$$

Je remplace dans (E)

$$-3 \times g'(x) + \frac{1}{4} \times g(x) = \frac{2}{5}$$

$$-3 \times 0 + \frac{1}{4} \times k = \frac{2}{5}$$

$$\frac{1}{4} k = \frac{2}{5}$$

$$k = \frac{2}{5} \div \frac{1}{4}$$

$$k = \frac{8}{5} = 1,6$$

donc $g(x) = 1,6$ est une solution particulière de (E).

b) $c(x)$ est affine

On cherche $g(x)$ sous la forme d'une fonction affine

on pose $\begin{cases} g(x) = mx + p \\ g'(x) = m \end{cases}$ je remplace dans (E)

exemple:

$$5y' + 3y = 6x + 13$$

on pose $\begin{cases} g(x) = mx + p \\ g'(x) = m \end{cases}$

je remplace:

$$5 \times g'(x) + 3 \times g(x) = 6x + 13$$

$$5 \times m + 3 \times (mx + p) = 6x + 13$$

$$5m + 3mx + 3p = 6x + 13$$

Par identification:

$$\begin{array}{l|l} 3m = 6 & 5m + 3p = 13 \\ m = \frac{6}{3} & 5 \times 2 + 3p = 13 \\ m = 2 & 10 + 3p = 13 \\ & 3p = 3 \\ & p = 1 \end{array}$$

donc $g(x) = 2x + 1$

est une solution particulière
de (E)

$$-3y' + 2y = -2x + 14$$

on pose $\begin{cases} g(x) = mx + p \\ g'(x) = m \end{cases}$

je remplace:

$$-3 \times g'(x) + 2 \times g(x) = -2x + 14$$

$$-3m + 2(mx + p) = -2x + 14$$

$$-3m + 2mx + 2p = -2x + 14$$

Par identification:

$$\begin{array}{l|l} 2m = -2 & -3m + 2p = 14 \\ m = -1 & -3 \times (-1) + 2p = 14 \\ & 3 + 2p = 14 \\ & 2p = 11 \\ & p = 5,5 \end{array}$$

donc $g(x) = -x + 5,5$

est une solution particulière
de (E)

$$y' + 2y = 3x + 3,5$$

On pose $\begin{cases} g(x) = mx + p \\ g'(x) = m \end{cases}$

je remplace:

$$g'(x) + 2g(x) = 3x + 3,5$$

$$m + 2(mx + p) = 3x + 3,5$$

$$m + 2mx + 2p = 3x + 3,5$$

Par identification:

$$\begin{array}{l|l} 2m = 3 & m + 2p = 3,5 \\ m = \frac{3}{2} & 1,5 + 2p = 3,5 \\ m = 1,5 & 2p = 2 \\ & p = 1 \end{array}$$

donc $g(x) = 1,5x + 1$

est une solution particulière
de (E)

c) C(x) est quelconque: la solution est donnée il faut vérifier qu'elle vérifie (E)

Exemple: (E) $y' - 2y = xe^x$

Prouver que $g(x) = \underbrace{(-x-1)}_{u \times v} e^x$ est une solution de (E).

$$\begin{aligned} g'(x) &= -1 \times e^x + (-x-1)e^x \\ &= (-x-2)e^x \end{aligned}$$

$$(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$$

$$u = -x-1 \quad u' = -1$$

$$v = e^x \quad v' = e^x$$

On remplace dans (E):

$$\begin{aligned} &(-x-2)e^x - 2 \times (-x-1)e^x \\ &= (-x-2)e^x + (2x+2)e^x \\ &= xe^x \end{aligned}$$

donc $g(x) = (-x-1)e^x$
est une solution particulière de (E).

Exercice: Prouver que g(x) solution particulière de (E):

(E) $2y' + 3y = (7x+16)e^{2x}$ avec $g(x) = (x+2)e^{2x}$

$$u = x+2 \quad u' = 1$$

$$v = e^{2x} \quad v' = 2e^{2x}$$

$$g'(x) = 1 \times e^{2x} + (x+2) \times 2e^{2x}$$

$$g'(x) = (2x+5)e^{2x}$$

on remplace dans (E):

$$\begin{aligned} &2 \times (2x+5)e^{2x} + 3 \times (x+2)e^{2x} \\ &= (4x+10 + 3x+6)e^{2x} \\ &= (7x+16)e^{2x} \end{aligned}$$

donc $g(x)$ est une solution particulière
de (E).

$$a=1 \quad b=5 \quad c=9$$

$$a=2 \quad b=2 \quad c=13$$

$$a=1 \quad b=-5 \quad c=6$$

$$x^2 + 6x + 9 = 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$\Delta \neq 0$?

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

→ variable nommée "delta"

$$a=1 \quad b=6 \quad c=9$$

$$\Delta = 6^2 - 4 \times 1 \times 9$$

$$= 36 - 36$$

$$= 0$$

Afficher : * valeur de delta

* "une seule solution"

* Calcul de la solution.

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2 \times 1} = -3$$

* Affiche : "X0 = -3"

$$2x^2 + 2x + 13 = 0$$

$$a=2 \quad b=2 \quad c=13$$

$$\Delta = 2^2 - 4 \times 2 \times 13$$

$$= -100 < 0$$

Pas de sol. réelles

$$\alpha = \frac{-b}{2a} \quad \beta = \sqrt{-\Delta}$$

$$\alpha = \frac{-2}{2 \times 2} = -0.5$$

$$\beta = \sqrt{100} = 10$$

* Affiche : ALPHA = -0.5

Beta = 10

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$a=1 \quad b=-5 \quad c=6$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 1 > 0$$

2 solutions réelles.

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) - \sqrt{1}}{2 \times 1} = 2$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) + \sqrt{1}}{2 \times 1} = 3$$

Affiche : "X1 = 2"

"X2 = 3"

import math

Définir une fonction

def résoudre_eq_ZD():

affiche: print("Résoudre $ax^2 + bx + c = 0$ ")

print("-" * 50)

Saisie des coefficients:

a = float(input("Entrez a ≠ 0"))

if a == 0:

print("Erreur : a = 0 !")

return

b = float(input("Entrez b ≠ 0"))

c = float(input("Entrez c ≠ 0"))

$$ay'' + by' + cy = 0$$

$$ar^2 + br + c = 0$$

$$a = \quad b = \quad c =$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 0 \text{ solut}^o \Rightarrow y(x) = (Ax + B) \exp(\alpha x)$$

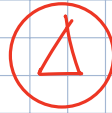
$$= (Ax + B) e^{\alpha x}$$

$$\Delta > 0 \Rightarrow y(x) = A e^{\alpha_1 x} + B e^{\alpha_2 x}$$

```
print ("Equation: ", a, "x^2 + ", b, "x + ", c, "= 0")
```

Calcul du discriminant delta

```
delta = b*b - 4*a*c
```



```
print ("delta = ", delta)
```

```
if delta > 0
```

```
    x1 = (-b + math.sqrt(delta)) / (2*a)
```

```
    x2 = (-b - math.sqrt(delta)) / (2*a)
```

```
    print ("Deux solutions réelles")
```

```
→ print ("x1 = ", x1)
```

```
→ print ("x2 = ", x2)
```

```
    print ("solution de l'eq. diff. : ")
```

```
    print ("y0(x) = A exp( ", x1, " x) + B exp( ", x2, " x) ")
```

1

```
elif delta == 0 :
```

```
    x0 = -b / (2*a)
```

```
    print ("Une solution double")
```

```
    print ("x0 = ", x0)
```

```
    print ("solution de l'eq. diff. : ")
```

```
    print ("y0(x) = (Ax + B) exp( ", x0, " x) ")
```

2

```
else :
```

```
    re = -b / (2*a)
```

```
    im = math.sqrt(-delta) / (2*a)
```

```
    print ("pas de solutions réelles")
```

```
    print ("alpha: ", re)
```

```
    print ("beta: ", im)
```

3

```
print("Solution de l'eq. diff : ")
print("Ysol(X) = (A cos(", im, "X) + B sin(", im, "X)) exp(", re, "X)")
```

Execution

resoudre_eq_2D()

Equation diff. 2nd ordre:

$$\begin{cases} a y''(x) + b y'(x) + c y(x) = 0 \\ a r^2 + b r + c = 0 \end{cases}$$

Ex: $y''(x) + 6y'(x) + 9y(x) = 0$

$a=1 \quad b=6 \quad c=9$

BTS 2019:

$$y'' + 10y' + 25y = 0$$

$a=1 \quad b=10 \quad c=25$

$\hookrightarrow y_0(x) = (Ax+B)e^{-5x}, A, B \in \mathbb{R}$

$y_0(t) = (At+B)e^{-5t}, A, B \in \mathbb{R}$

BTS 2015:

λ lambda

Partie 1: a. $y'' + 40y' + 400y = 0$

$a=1 \quad b=40 \quad c=400$

$\Delta = 40^2 - 4 \times 1 \times 400 = 0$

$\lambda = -20$

$y_0(x) = (Ax+B)e^{-20x}, A+B \in \mathbb{R}$

b. $f(t) = (At+B)e^{-20t}, A+B \in \mathbb{R}$

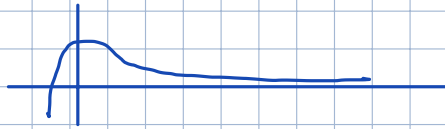
Exemples:

$f(t) = (x+1)e^{-20x}, A=1 \quad B=1$

$\xrightarrow{N}$

$$f_2(t) = (2t + 3)e^{-20t}, \quad A=2 \quad B=3$$

$$f_3(t) = (100t + 10)e^{-20t}, \quad A=100 \quad B=10.$$



$$(e^{a \times t})' = a e^{at}$$

$$e^0 = 1$$

$$b. \quad f(t) = (At + B)e^{-20t}$$

$$f(0) = 10 \quad \Rightarrow \quad f(0) = (A \times 0 + B)e^{-20 \times 0} = 10$$

$$B \times 1 = 10$$

$$B = 10$$

$$f'(0) = 0$$

$$\Rightarrow f'(t) = (u \times v)' = u' \times v + u \times v'$$

$$u = At + B$$

$$u' = A$$

$$v = e^{-20t}$$

$$v' = -20e^{-20t}$$

$$f'(t) = A \times e^{-20t} + (At + B) \times (-20e^{-20t})$$

$$f'(0) = A \times \underbrace{e^{-20 \times 0}}_1 + (A \times 0 + \underbrace{B}_{10}) \times (-20 \times \underbrace{e^{-20 \times 0}}_1)$$

$$= A + (-200) = 0$$

$$A = 200$$

$$f(t) = (200t + 10)e^{-20t}$$

Partie 2:

1)



$f \downarrow$ sur $[0, +\infty[$

en $t=0$ le coeff. directeur de f' est nul.

en $t=0$, le coeff. de f' est proche de 0 - (negatif)

$$2) a) \quad f'(t) = A \times e^{-20t} + (At + B) \times (-20e^{-20t})$$

$$= 200 \times e^{-20t} + (200t + 10) \times (-20e^{-20t})$$

$$= 200e^{-20t} - 4000te^{-20t} - 200e^{-20t}$$

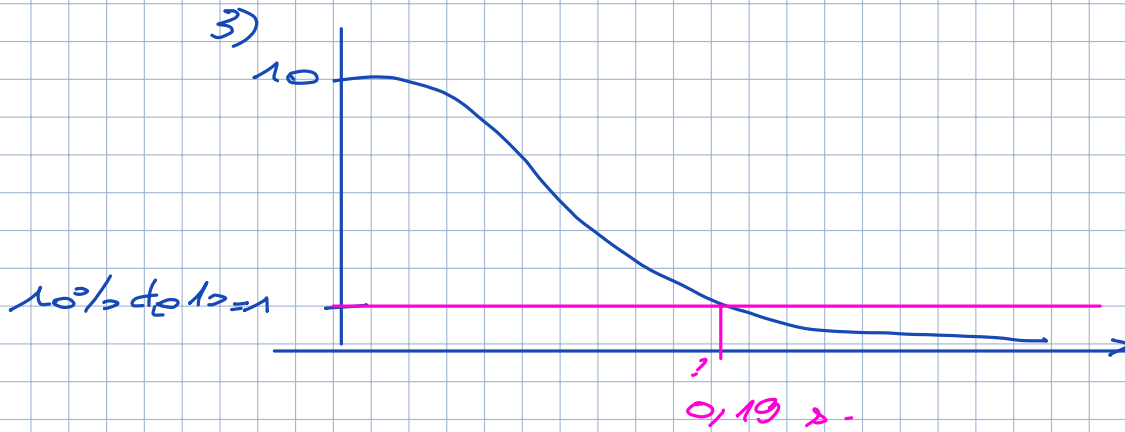
$$= -4000te^{-20t}$$

$$b) * \text{ si } t > 0 \quad f'(t) = \underbrace{-4000}_{<0} \times \underbrace{t}_{>0} \times \underbrace{e^{-20t}}_{>0} < 0$$

donc $f \downarrow$ sur $[0; +\infty[$

$$* f'(0) = 0 = -4000 \times 0 \times e^{-20 \times 0}$$

$$* f'(0,4) = -4000 \times 0,4 \times e^{-20 \times 0,4} < 0 \text{ proche de } 0.$$



$$4. \quad F(t) = -(10t + 1) e^{-20t}$$

a) F est une primitive de f sur $[0; +\infty[$

$$b) \quad \frac{1}{0,4 - 0} \int_0^{0,4} f(t) dt = \frac{1}{0,4} \left[-(10t + 1) e^{-20t} \right]_0^{0,4}$$

$$= \frac{1}{0,4} \left(-(10 \times 0,4 + 1) e^{-20 \times 0,4} + (10 \times 0 + 1) e^{-20 \times 0} \right)$$

$$= \frac{1}{0,4} \left(-5e^{-8} + 1 \right)$$

$$\approx 2,496 \text{ à } 10^{-3}$$

est-elle sa marche?