

Chapitre 8: Variables aléatoires discrètes

I) Variable aléatoire:

1) Définition: une variable aléatoire discrète (VAD) est une grandeur numérique issue d'une expérience aléatoire qui prend les valeurs $x_1; x_2; \dots; x_n$ avec les probabilités associées $p_1; p_2; \dots; p_n$. on la note X
on écrit alors: $P(X = x_i) = p_i, i \in \{1; \dots; n\}$

Exemple: On lance un dé à 6 faces bien équilibré

Un joueur mise 2€, si le résultat du lancer est pair il gagne le double de la valeur du dé sinon il perd sa mise.

On pose X la variable aléatoire qui à tout lancer associe le gain

X peut valoir : $-2; 2; 6; 10$

$$P(X = -2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}; P(X = 2) = \frac{1}{6}; P(X = 6) = \frac{1}{6}; P(X = 10) = \frac{1}{6}$$

x_i	-2	2	6	10
p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

ce tableau est appelé loi de X

2) loi d'une variable aléatoire discrète:

Définition: la loi de probabilité de la VAD discrète X est la fonction qui à toute valeur de X associe la probabilité p_i .

Exemple: On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes et on donne les valeurs suivantes aux différentes cartes :

Roi $\rightarrow$ 4 points

Valet $\rightarrow$ 1 point

Dame $\rightarrow$ 3 points

0 point pour tout autre carte.

X est la variable aléatoire qui donne le nombre de points par tirage

Donner la loi de X:

$X = x_i$	0	1	3	4	Total
$P(X = x_i)$	$\frac{20}{32} = \frac{5}{8}$	$\frac{4}{32} = \frac{1}{8}$	$\frac{4}{32} = \frac{1}{8}$	$\frac{4}{32} = \frac{1}{8}$	1

3) Espérance d'une variable aléatoire discrète :

Définition : Soit X une VAD on appelle espérance de X on note $E(X)$ le réel qui vaut :

$$E(X) = x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + \dots + x_m \times p_m = \sum_{i=1}^m x_i p_i$$

Remarque : $E(X)$ représente la valeur moyenne de X .

Exemple : lancer de dé :

$$E(X) = -2 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} + 10 \times \frac{1}{6} = \frac{12}{6} = 2 \text{ €}$$

tirage de carte :

$$E(X) = 0 \times \frac{5}{8} + 1 \times \frac{1}{8} + 3 \times \frac{1}{8} + 4 \times \frac{1}{8} = \frac{8}{8} = 1 \text{ point.}$$

4) Variance d'une VAD et Ecart-type

Définition : Soit X une VAD on appelle variance de X notée $V(X)$

le réel positif qui vaut :

$$V(X) = \sum_{i=1}^m (x_i - E(X))^2 \times p_i$$

l'écart type : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Remarque l'écart type, l'espérance et la X ont la même unité.

Exemple :

a) lancer de dé

$$V(X) = (-2 - 2)^2 \times \frac{1}{2} + (2 - 2)^2 \times \frac{1}{6} + (6 - 2)^2 \times \frac{1}{6} + (10 - 2)^2 \times \frac{1}{6} = \frac{128}{6} = \frac{64}{3}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{64}{3}} = \frac{8}{\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{3} \approx 4,62 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

b) tirage de carte :

$$V(X) = (0 - 1)^2 \times \frac{5}{8} + (1 - 1)^2 \times \frac{1}{8} + (3 - 1)^2 \times \frac{1}{8} + (4 - 1)^2 \times \frac{1}{8} = \frac{18}{8} = \frac{9}{4} = 2,25$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} = 1,5$$

5) Propriétés et théorème:

th de Koenig: $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

Exemple du dé: $V(X) = (-2)^2 \times \frac{1}{6} + 2^2 \times \frac{1}{6} + 6^2 \times \frac{1}{6} + 10^2 \times \frac{1}{6} - 2^2 = \frac{64}{3}$

Propriétés: Soient X une VAD, a et b deux réels.

$$E(aX+b) = a E(X) + b$$

$$V(aX+b) = a^2 V(X)$$

$$\sigma(aX+b) = |a| \times V(X)$$

Exemple lancé de dé $E(X) = 2 \text{€}$

$$Y = \frac{1}{2}X - 3 \Rightarrow E(Y) = E\left(\frac{1}{2}X - 3\right) = \frac{1}{2} E(X) - 3 = \frac{1}{2} \times 2 - 3 = -2 \text{€}$$

↳ mise: $\frac{1}{2} \times (-2) - 3 = -4 \Rightarrow 4 \text{€ mise}$

gain: $\frac{1}{2} \times 2 - 3 = -2 \Rightarrow$

$$\frac{1}{2} \times 6 - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \times 10 - 3 = 2 \Rightarrow$$

II - lois fondamentales:

1) loi de Bernoulli:

Une expérience de Bernoulli est une expérience aléatoire à 2 issues: le succès et l'échec. La probabilité du succès est notée p .

une VAD X suit une loi de Bernoulli si:

$X = x_i$	1	0
$P(X = x_i)$	p	$1-p$

on note X suit une loi de Bernoulli de paramètre p
 $X \sim B(p)$

Exemple: On lance un dé à 6 faces bien équilibré.

X est la VAD qui vaut 1 si le dé donne "6" et 0 sinon

Donner la loi de X :

$X = x_i$	1	0
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$

on note $X \sim B\left(\frac{1}{6}\right)$

Caractéristiques: Si $X \sim \mathcal{B}(p)$: $E(X) = p$
 $V(X) = p - p^2 = p(1-p)$
 $\sigma(X) = \sqrt{p(1-p)}$

2) loi binomiale:

Définition: Si on répète n fois une expérience de Bernoulli de manière indépendante (de même paramètre p)

alors la VAD, X qui compte le nombre de succès suit une loi binomiale telle que

$$k \in \{0, \dots, n\} \quad P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 1$$

$$\Delta 0! = 1$$

Ex: $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5 \times \cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times 1}{2 \times 1 \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times 1} = 10$

$$\binom{7}{4} = \frac{7!}{4!3!} = \frac{7 \times \cancel{6} \times \cancel{5} \times \cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times 1}{4 \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times 1 \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times 1} = 35$$

Exemple: On lance 2 fois un dé à 6 faces bien équilibré.

X est la variable aléatoire qui compte le nombre de "6" obtenu

Donner la loi de X :

⊛ Expérience de Bernoulli: On lance le dé on regarde si ça fait "6" (succès)

$$P(\text{"succès"}) = \frac{1}{6} = p$$

⊛ Répétition: On répète 2 fois cette expérience de manière indépendante.
 $n=2$

⊛ Compteur: X compte le nombre de "succès"

Donc X suit une loi binomiale de paramètres $n=2$ et $p=\frac{1}{6}$
 $X \sim \mathcal{B}(2; \frac{1}{6})$

$X = x_i$	0	1	2	Total
$P(X = x_i)$	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

$$\binom{2}{0} = \frac{2!}{0!2!} = 1$$

$$\binom{2}{1} = \frac{2!}{1!1!} = 2$$

$$\binom{2}{2} = \frac{2!}{2!0!} = 1$$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

$\binom{0}{0}$
 $\binom{1}{0} \binom{1}{1}$
 $\binom{2}{0} \binom{2}{1} \binom{2}{2}$
 $\binom{3}{0} \binom{3}{1} \binom{3}{2} \binom{3}{3}$
 $\binom{4}{0} \binom{4}{1} \binom{4}{2} \binom{4}{3} \binom{4}{4}$

Triangle de Pascal

$$P(X=0) = \binom{2}{0} \times \left(\frac{1}{6}\right)^0 \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{36}$$

$$P(X=1) = \binom{2}{1} \times \left(\frac{1}{6}\right)^1 \times \left(\frac{5}{6}\right)^1 = \frac{10}{36}$$

$$P(X=2) = \binom{2}{2} \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(\frac{5}{6}\right)^0 = \frac{1}{36}$$

Caractéristiques:

$X \sim \mathcal{B}(n; p)$ on a $E(X) = n \times p$

$$V(X) = n \times p \times (1-p)$$

$$\sigma(X) = \sqrt{n \times p \times (1-p)}$$

3) loi de Poisson:

X est une VAD et suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$

$k \in \mathbb{N}$, lorsque: $P(X=k) = e^{-\lambda} \times \frac{\lambda^k}{k!}$

Caractéristiques:

$X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ on a $E(X) = \lambda$

$$V(X) = \lambda$$

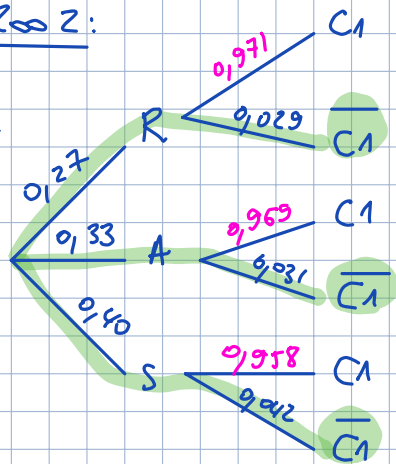
$$\sigma(X) = \sqrt{\lambda}$$

Remarque: Sous certaines conditions, on peut approcher une loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$ par une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ en prenant $\lambda = n \times p$.

BTS 2002:

(A)

1)



$$P(\bar{C}_1) = P(R \cap \bar{C}_1) + P(A \cap \bar{C}_1) + P(S \cap \bar{C}_1)$$

$$= 0,27 \times 0,029 + 0,33 \times 0,031 + 0,40 \times 0,042$$

$$\approx 0,035 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

$$2) P_{\bar{C}_1}(A) = \frac{P(A \cap \bar{C}_1)}{P(\bar{C}_1)} \approx \frac{0,33 \times 0,031}{0,035} \approx 0,292 \text{ à } 10^{-3}$$

(B) 1) Bernoulli: On prélève un ruban, on regarde s'il jaunit le papier (succès)

$$P(\text{succès}) = p = 0,008$$

Répétition: On répète l'expérience de Bernoulli 500 fois ($n=500$) de manière indépendante - car le tirage est avec remise.

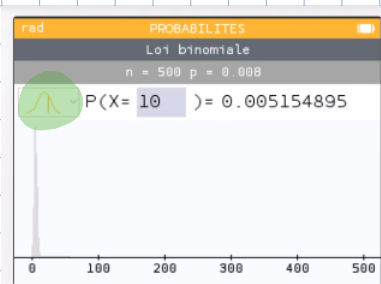
Compteur: X compte le nombre de succès

$$\text{Donc: } X \sim \mathcal{B}(500; 0,008)$$

2) Probabilité que le lot comporte exactement 10 rubans défectueux

$$P(X=10) = \binom{500}{10} \times 0,008^{10} \times 0,992^{490}$$

$$\approx 0,005 \text{ à } 10^{-3}.$$

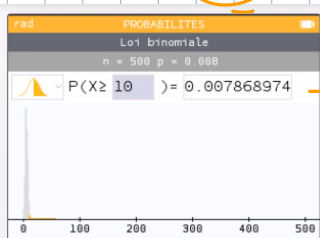


(TI) binomfdp
2nd → distrib

nb-essais: 500
p: 0,008
valeur de x: 10
→ binomfdp(500; 0,008, 10)

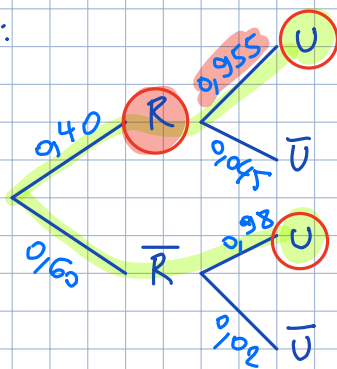
$$3) P(X \geq 10) \approx 0,008 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}$$

(TI) $P(X \geq 10) = 1 - P(X \leq 9) \rightarrow 1 - \rightarrow 2^{\text{nd}} \text{ distrib} \rightarrow \text{binomfrep}$



nb-essais: 500
p: 0,008
valeur de x: 9

A.



1) a) $P_R(U) = 0,955$

b) $P_{\bar{R}}(U) = 0,98$

c) $P(U) = 0,955 \times 0,4 + 0,98 \times 0,6 = 0,97$

2) a) Bernoulli: On prélève 1 roulement, on regarde s'il est utilisable (Succès)

$P(\text{"succès"}) = P(U) = 0,97 = p$

Répétition: On répète cette expérience 10 fois ($n=10$) de manière indépendante. (tirage avec remise)

Compteur: X compte le nombre de succès.

$X \sim \mathcal{B}(10; 0,97)$

b) "neuf au moins" $\Leftrightarrow$ au minimum 9 $\Leftrightarrow 9 - 10$

$P(X \geq 9) = 1 - P(X \leq 8)$

NW $\cdot P(X \leq 9)$
 $\approx 0,9654...$

II $\cdot 1 - \text{binom fep}$
(end = distrib)



trials/essais : 10
 p : 0,97
 x value : 8

$1 - \text{binom fep}(10; 0,97, 8)$
 $\approx 0,9654...$

$P(X \geq 9) \approx 0,965 \approx 10^{-3}$

3) a) $\lambda = n \times p = 100 \times 0,03 = 3$

b) $P(Y \geq 2) = 1 - P(Y \leq 1)$

NW $\cdot P(Y \geq 2)$
 $\approx 0,80$

II $\cdot 1 - \text{Poisson fep}(3, 1)$
 $\approx 0,80$

BTS 2010 :

1) $Y \sim \mathcal{B}(n; p)$

① Épreuve de Bernoulli: On prélève 1 pièce on regarde si elle est non conforme

$$p(\text{non conforme}) = P(\text{« succès »}) = 0,05 = 1 - 0,95 = p$$

② Répétitions: On répète 80 fois ($n = 80$) cette épreuve de manière indépendante (tirage avec remise)

③ Compteur: Y compte le nombre de succès.

$$\text{donc } Y \sim \mathcal{B}(80; 0,05)$$

2) $P(Y=3) \approx 9,80 \times 10^{-2}$ (TI) $\xrightarrow{\text{2nd distrib}} \text{binompdf}(80, 0,05, 3)$

3) a) $\lambda = n \times p = 80 \times 0,05 = 4$

b) « au plus 3 pièces » = $Y \leq 3$



$$P(Y \leq 3) \approx 0,48 \approx 10^{-2}$$

(TI) $\xrightarrow{\text{2nd distrib}} \text{poissoncdf}(4, 3)$

$$\lambda = 4$$
$$X \text{ value} = 3$$

(NW) Probab $\rightarrow$ Poisson $\rightarrow \lambda = 4$
 $P(X \leq 3)$

BTD 2011 :

① $X \sim \mathcal{N}(238; 0,4)$

$$P(237,18 \leq X \leq 238,82) \approx 0,959$$

② $Y_1 \sim \mathcal{B}(50; 0,04)$

① Bernoulli: On prélève 1 disque on regarde si il est non conforme

$$P(\text{non-conforme}) = P(\text{succès}) = p = 0,04$$

② Répétitions: On répète 50 fois ($n = 50$) cette épreuve de manière indépendante (tirage avec remise)

③ Compteur: Y_1 compte le nombre de succès.

$$Y_1 \sim \mathcal{B}(50; 0,04)$$

$$2) P(Y_1 = 0) \approx 0,13 \text{ à } 10^{-3}$$

$$3) a - \lambda = n \times p = 50 \times 0,04 = 2$$

$$b - \text{« au plus 3 »} = Y_2 \leq 3 \quad \rightarrow \text{Frep}$$



$$P(Y_2 \leq 3) \approx 0,857 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

① 1) Bernoulli: On prélève 1 bouteille et on regarde si elle est non-conforme (succès)

$$P(\text{Succès}) = 0,005 = p$$

Répétitions: On répète l'expérience 80 fois ($n=80$) de manière indépendante (tirage avec remise)

Compteur: X compte le nombre de succès.

$$X \sim \mathcal{B}(80; 0,005)$$

$$2) P(X=1) \approx 0,269 \text{ à } 10^{-3}$$

3)