

Chapitre 6: Echantillonnage et Estimation

I Rapports des lois:

loi	Notation	Formule	$E(X)$	$V(X)$	$\sigma(X)$
loi de Bernoulli	$B(p)$	$P(X=1)=p$ et $P(X=0)=1-p$	p	$p(1-p)$	$\sqrt{p(1-p)}$
loi Binomiale	$B(n; p)$	$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ $k \in \llbracket 0 \dots n \rrbracket$	$n \times p$	$n \times p \times (1-p)$	$\sqrt{np(1-p)}$
loi Poisson	$P(\lambda)$	$P(X=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ $k \in \mathbb{N}, k! = k \times (k-1) \times \dots \times 1$	λ	λ	$\sqrt{\lambda}$
loi Normale	$\mathcal{N}(\mu; \sigma)$	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ $x \in \mathbb{R}$	μ	σ^2	σ
loi Normale centrée réduite	$\mathcal{N}(0; 1)$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ $x \in \mathbb{R}$	0	1	1

lois discrètes

lois continues

II) Approximation de la loi binomiale -

1) Par la loi de Poisson.

Pour n "assez grand" et p "proche de 0" tels que $np(1-p)$ ne soit pas trop grand, on peut approximer une $B(n; p)$ par une $P(\lambda)$ avec $\lambda = np$

Remarque: on convient que cette approximation est faisable pour $n > 30$; $p \leq 0,1$ et $np(1-p) \leq 10$

Exemple: Dans une chaîne de production, 5% des pièces sont défectueuses; on prélève une pièce, on examine si elle est défectueuse et on repose la pièce parmi les autres. On répète 120 fois cette expérience. On désigne par X la variable aléatoire qui compte le nombre de pièces défectueuses tirées

- 1) Quelle est la loi de X ? En préciser les paramètres.
- 2) Calculer $P(X=5)$
- 3) Montrer qu'une approximation de cette loi par une loi de Poisson est possible. On note Y la variable aléatoire obtenue
- 4) Comparer $P(X=5)$ avec $P(Y=5)$.

1)* Expérience de Bernoulli: On prélève une pièce et on regarde si elle est défectueuse (Succès). la probabilité d'un succès $p = P(\text{Succès}) = 5\% = 0,05$.

* On répète 120 fois cette expérience de manière indépendante (tirage avec remise)

la variable X compte le nombre de succès donc

X suit une loi binomiale de paramètres $n=120$ $p=0,05$
on écrit $X \sim B(120; 0,05)$

2) $P(X=5) \approx 0,163$ (TI) 2nd → distrib → Binom fdp(120; 0,05; 5)

3) $n=120 > 30$; $p=0,05 \leq 0,1$; $np(1-p) = 120 \times 0,05 \times 0,95$
 $= 5,7 \leq 10$

donc on peut approcher la $B(120; 0,05)$

par $P(\lambda)$ avec $\lambda = n \times p = 120 \times 0,05 = 6$

4) $P(X=5) \approx 0,163$

$P(Y=5) \approx 0,161$

avec $Y \sim P(6)$

la différence est minime : 0,002.

2) Par la loi normale

Pour n "assez grand" et p ni proche de 0 ni de 1 tels que
 $np(1-p)$ ne soit pas "trop grand"

On peut approcher $B(n; p)$ par $N(\mu; \sigma)$ où $\mu = n \times p$
 $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$

Remarque: $n \geq 50$; $p \leq 0,5$ et $np(1-p) > 10$

Exemple: On lance 300 fois une pièce de monnaie truquée.

la probabilité d'obtenir "face" est $\frac{2}{3}$

On désigne par X la variable aléatoire qui compte le nombre de "face".

1) Justifier la loi de X

2) Calculer $P(X > 210)$

3) Montrer qu'une approximation par une loi normale est possible

Déterminer les paramètres.

4) En déduire $P(X > 210)$ à l'aide de la loi normale.

1) Expérience de Bernoulli: On lance une pièce et on regarde si elle fait "face" (succès)

$$P(\text{succès}) = \frac{2}{3}$$

On répète 300 fois cette expérience de manière indépendante (évident)

la variable X compte le nombre de succès donc $X \sim \mathcal{B}(300; \frac{2}{3})$

2) $P(X > 210)$

(NW) $P(X \geq \dots)$ $P(X > 210) = P(X \geq 211)$ car X est une variable discrète.

(TI) $P(X \leq \dots)$ $P(X > 210) = 1 - P(X \leq 210)$ car X est une variable discrète.



$$P(X > 210) \approx 0,098$$

3) $n = 300 \geq 50$, $p = \frac{2}{3} \leq 0,5$; $np(1-p) = 300 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{200}{3} > 10$
 $X \sim \mathcal{B}(300; \frac{2}{3})$ est approchable par $\mathcal{N}(\mu; \sigma)$

$$\text{avec } \mu = n \times p = 300 \times \frac{2}{3} = 200$$

$$\sigma = \sqrt{np(1-p)}$$

$$= \sqrt{300 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{200}{3}} \approx 8,16$$

4) $P(Y > 210)$ avec $Y \sim \mathcal{N}(200; 8,16)$

$$P(Y > 210) \approx 0,110 \quad \text{Si on compare on est } 0,110 - 0,098 = 0,012$$

III théorème de la limite centrée et lois d'échantillonnage.

1) théorème:

Soient $X_1; X_2; \dots; X_n$ n variables aléatoires indépendantes de même espérance ($E(X)$) et de même écart type ($\sigma(X)$)

si on pose
$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

Alors
$$\overline{X}_n \sim \mathcal{N}(\mu; \sigma)$$
 avec $\mu = E(X)$
 $\sigma = \sigma(X)$

2) Application: lois d'échantillonnage

En supposant connus les caractéristiques d'une population, que peut-on en déduire sur les échantillons prélevés dans la population.

On peut étudier:

- * loi d'échantillonnage des moyennes
- * loi d'échantillonnage des fréquences.

a) loi d'échantillonnage des moyennes.

Étant donné une population de taille N et X une variable aléatoire continue telle que $E(X) = m$ et $\sigma(X) = \sigma$

Dans cette population on prélève un échantillon de taille n
on crée ainsi $X_1, X_2, \dots, X_n$: n var de même loi que X .

Remarque: la loi de X n'est pas connue, les seuls éléments connus sont $E(X)$ et $\sigma(X)$

Propriété: Si X_i sont indépendantes alors

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \text{ est approchable pour } n \geq 30$$

par une $\mathcal{N}(m; \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

Exemple: Une machine fabrique en grande série des pièces dont le diamètre est de 28,2 mm. La machine est réglée de telle façon que l'écart moyen quadratique (écart-type) soit 0,027 mm.

Si on pose M_n la variable aléatoire qui associe à tout échantillon de taille 100 la moyenne des diamètres mesurés

$$\text{alors } M_n \sim \mathcal{N}(m; \sigma) \quad \text{avec } m = 28,2 \text{ mm} \\ \sigma = \frac{0,027}{\sqrt{100}} = 0,0027$$

b) loi d'échantillonnage des fréquences:

Propriété: la loi d'échantillonnage de taille n de la fréquence

$$f_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \quad \text{pour } n \text{ assez grand } (n \geq 50)$$

peut être approchée par une $\mathcal{N}\left(p; \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$

Exemple: Une urne contient 100 boules numérotées de 1 à 100, indistinctes au toucher. Lors d'un tirage aléatoire d'une boule, la probabilité d'obtenir un nombre inférieur ou égal à 37 est $p = 0,37$ (Succès)

Un échantillon de taille 50 est obtenu par tirage aléatoire avec remise.

On s'intéresse à la fréquence d'apparition d'un succès lors de 50 tirages.

$$f_{50} = \frac{\text{nombre de succès}}{50}$$

On appelle X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si la $i^{\text{ème}}$ boule est un succès et 0 si la $i^{\text{ème}}$ boule est un échec.

$$\text{donc } f_{50} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_{50}}{50} \quad \text{or } E(X_i) = p = 0,37 \\ \sigma(X_i) = \sqrt{p(1-p)} \approx 0,48$$

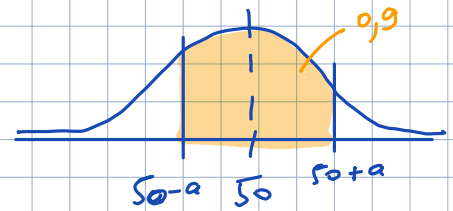
donc f_{50} peut être approchée par une $\mathcal{N}\left(0,37; \frac{0,48}{\sqrt{50}} \approx 0,068\right)$

Exercice: 1) $Y = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_{36}}{36}$ avec $X_i \sim \mathcal{N}(50; 0,5)$

d'après le cours: $Y \sim \mathcal{N}\left(m; \frac{\sigma}{\sqrt{m}}\right) = \mathcal{N}\left(50; \frac{0,5}{\sqrt{36}}\right)$

$$Y \sim \mathcal{N}(50; 0,0833)$$

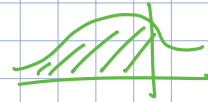
2) $P(50 - a \leq Y \leq 50 + a) = 0,9$



(TI)

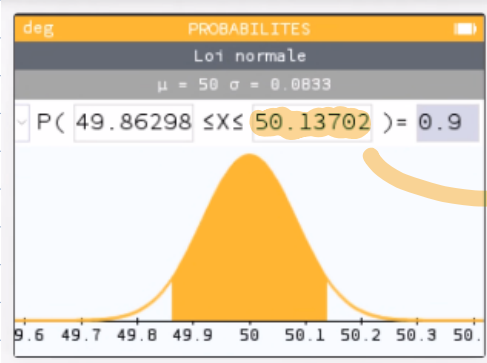
$$2P(Y \leq 50 + a) - 1 = 0,9$$

$$P(Y \leq 50 + a) = \frac{0,9 + 1}{2}$$



$$P(Y \leq 50 + a) = 0,95$$

fractnormale(0,95; 50; 0,0833) | aire = 0,95
 $\mu = 50$
 $\sigma = 0,0833$
 $\approx 50,13701\dots$



$$50 + a \approx 50,13702$$

$$a \approx 0,1370$$

Même question avec $\mu = 40$ $\sigma = 0,6$ $Y \sim \mathcal{N}\left(40; \frac{0,6}{\sqrt{36}}\right) = \mathcal{N}(40; 0,1)$

(TI) fractnormale(0,95; 40; 0,1) $\approx 40,16449\dots$
 donc $a \approx 0,1645 \times 10^{-4}$ près.

Ex2: 1) $\bar{X}_{100} \sim \mathcal{N}\left(10; \frac{0,03}{\sqrt{100}}\right) = \mathcal{N}(10; 0,003)$

2) $P(10 - h \leq \bar{X}_{100} \leq 10 + h) = 0,95$

(TI) aire = $\frac{0,95 + 1}{2} = 0,975 \Rightarrow \text{fractnormale}(0,975; 10; 0,003)$

donc $h \approx 0,0059$.

idem pour: $m = 20$ $\sigma = 0,1 \Rightarrow \frac{0,1}{\sqrt{100}} = 0,01$ donc $\bar{X}_{100} \sim \mathcal{N}(20; 0,01)$ on a $h \approx 0,016$

Ex3: 1) $\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \sim \mathcal{N}\left(4,2; \frac{0,2}{\sqrt{n}}\right)$

2) $P(4,17 \leq \bar{X} \leq 4,23) = 0,95$

1^{ère} méthode: Remarque du cours: si $X \sim \mathcal{N}(m; \sigma)$

$$P(m - 2\sigma \leq X \leq m + 2\sigma) \approx 0,95$$

$$P(m - \sigma \leq X \leq m + \sigma) \approx 0,68 \quad \text{et} \quad P(m - 3\sigma \leq X \leq m + 3\sigma) \approx 0,997$$

$$P(4,17 \leq \bar{X} \leq 4,23) = 0,95$$

$$P(4,2 - 0,03 \leq \bar{X} \leq 4,2 + 0,03) = 0,95$$

donc $0,03 = 2\sigma$

$0,015 = \sigma$

$$\bar{X} \sim \mathcal{N}\left(4,2; \frac{0,2}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\sigma = \frac{0,2}{\sqrt{n}}$$

donc $\frac{0,015}{1} = \frac{0,2}{\sqrt{n}}$

$$\sqrt{n} = \frac{0,2 \times 1}{0,015}$$

$$n = \left(\frac{0,2 \times 1}{0,015} \right)^2 \approx 178$$

2^{ème} méthode: Changement de variable:

$$\bar{X} \sim \mathcal{N}\left(4,2; \frac{0,2}{\sqrt{n}}\right)$$

$$P(4,17 \leq \bar{X} \leq 4,23) = 0,95$$

$$P(4,17 - 4,2 \leq \bar{X} - 4,2 \leq 4,23 - 4,2) = 0,95$$

$$P(-0,03 \leq \bar{X} - 4,2 \leq 0,03) = 0,95$$

$$P\left(-0,03 \times \frac{\sqrt{n}}{0,2} \leq (\bar{X} - 4,2) \frac{\sqrt{n}}{0,2} \leq 0,03 \times \frac{\sqrt{n}}{0,2}\right) = 0,95$$

$$T = \frac{\bar{X} - m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0;1)$$

$$T = \frac{\bar{X} - 4,2}{\frac{0,2}{\sqrt{n}}}$$

$$T = (\bar{X} - 4,2) \frac{\sqrt{n}}{0,2}$$

$$T \sim \mathcal{N}(0;1)$$

$$P(-0,15\sqrt{n} \leq T \leq 0,15\sqrt{n}) = 0,95 \text{ avec } T \sim \mathcal{N}(0;1)$$

$$\textcircled{\text{TI}} \text{ fracnormale}\left(\frac{0,95+1}{2}; 0; 1\right) \approx 1,96$$

$$0,15\sqrt{n} \approx 1,96$$

$$\sqrt{n} \approx \frac{1,96}{0,15}$$

$$n \approx \left(\frac{1,96}{0,15}\right)^2$$

$$n \approx 171$$

$$\text{avec } P(4,17 \leq \bar{X} \leq 4,73) = 0,99 \text{ on a } 0,15\sqrt{n} \approx 2,576$$

$$n \approx \left(\frac{2,576}{0,15}\right)^2 \approx 295$$

Ex4: $n = 64$ $p = 0,04$

$$1) \text{ D'après le cours } F \sim \mathcal{N}\left(0,04; \sqrt{\frac{0,04(1-0,04)}{64}}\right)$$

$$F \sim \mathcal{N}(0,04; 0,0245)$$

$$2) P(0,03 \leq F \leq 0,05) \approx 0,317$$

$$\textcircled{\text{TI}} \text{ normalcdf}(0,03; 0,05; 0,04; 0,0245) \approx 0,317$$

$$3) P(0,04 - a \leq F \leq 0,04 + a) = 0,95$$

$$\textcircled{\text{TI}} \text{ fracnormale}\left(\frac{1+0,95}{2}; 0,04; 0,0245\right) \approx 0,0880$$

$$\text{donc } a \approx 0,088 - 0,04 = 0,048$$

$$4) \text{ Valeur de } n \text{ pour que } P(0,03 \leq F \leq 0,05) = 0,99$$

Changement de variable: $T = \frac{F - 0,04}{\sqrt{\frac{0,04 \times (1-0,04)}{n}}} = \frac{F - 0,04}{\sqrt{0,04 \times 0,96}} \times \sqrt{n}$

$$= \frac{F - 0,04}{0,196} \times \sqrt{n} \sim \mathcal{N}(0;1)$$

$$P\left(\frac{0,03 - 0,04}{0,196} \times \sqrt{n} \leq T \leq \frac{0,05 - 0,04}{0,196} \times \sqrt{n}\right) \stackrel{0,99}{=} 0,99$$

IV Estimation:

Contexte: Un industriel produit un très grand nombre de yaourts, pour lesquels l'emballage doit respecter des normes sanitaires draconiennes.
À la suite de mauvais réglages de l'une des machines, l'industriel a produit 1 million de yaourts dont beaucoup risquent de mettre en danger le consommateur.

Il souhaite connaître la proportion de yaourts susceptible d'être néfaste pour le consommateur. Il veut savoir s'il faut détruire toute la production, ou s'il prend le risque du préjudice.

Il ne peut pas tester tous les yaourts mais seulement un échantillon. Quelles réponses tirer de cet échantillon?

Il décide de tester 100 yaourts, et il a trouvé que 2% contenait des germes de salmonelle. Quelle décision doit-il prendre?

Plusieurs questions se posent:

- * Est-ce que tous les échantillons donneraient le même %.
- * La taille de l'échantillon est-elle suffisante?
 - ↳ Quelle confiance peut-on donner à un tel échantillon?
- * Aurait-on une meilleure fiabilité avec des échantillons plus grands?

1) Estimations ponctuelles:

a) Moyenne: La valeur moyenne m_e d'un paramètre observé sur un échantillon de taille fixe fournit une estimation $\bar{x}$ de la moyenne réelle du paramètre dans la population ($\bar{x} \approx m_e$)

b) Fréquence: "idem" f_e est une estimation de f pour la population ($f \approx f_e$)

c) Écart-type: l'écart type σ_e fournit une estimation σ telle que

$$\sigma = \sigma_e \times \sqrt{\frac{n}{n-1}} \quad (n \text{ taille de l'échantillon})$$

Remarque: plus n est grand plus $\sqrt{\frac{n}{n-1}}$ s'approche de 1 donc σ_e de σ .

Exemple: La mesure de la longueur de vis dans un échantillon de 150 pièces

permet de déterminer un écart-type $\sigma \approx 3 \text{ mm}$.

La meilleure estimation ponctuelle de σ est donc $\sigma = \sigma_e \sqrt{\frac{n}{n-1}} \approx 3 \times \sqrt{\frac{150}{149}}$

$$\sigma \approx 3,01$$

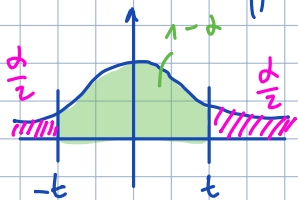
2) Estimations par intervalles de confiance:

a) Moyenne: On souhaite à partir d'un échantillon, déterminer un intervalle de confiance contenant la valeur moyenne de la population avec un risque d'erreur α défini à l'avance

On suppose que les conditions sont réunies pour faire l'approximation par la loi d'échantillonnage de la moyenne $\bar{X}$.

$$\bar{X} \sim \mathcal{N}\left(m; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

on effectue le changement de variable: $T = \frac{\bar{X} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim \mathcal{N}(0; 1)$



$$P(-t \leq T \leq t) = 1 - \alpha$$

$$P\left(-t \leq \frac{\bar{X} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq t\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(-t \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{X} - m \leq t \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\bar{X} - t \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{X} + t \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

donc $m \in \left[\bar{X} - t \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{X} + t \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ pour $100 \times (1 - \alpha) \%$ des échantillons.

Propriété: L'intervalle $\left[\bar{X} - t \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{X} + t \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ est l'intervalle de

confiance de la moyenne m de la population avec le "coefficient de confiance" t tel que $P(-t \leq T \leq t) = 1 - \alpha$

où $T \sim \mathcal{N}(0; 1)$

Remarque: les valeurs du coefficient de confiance usuelles sont:

$$\begin{aligned} * t &\approx 2,576 & \text{pour } \alpha = 0,99 \\ * t &\approx 1,96 & \text{pour } \alpha = 0,95 \end{aligned}$$

Exemple: On suppose que la durée de vie, exprimée en heures, d'une ampoule électrique suit la loi normale de moyenne inconnue μ et d'écart type $\sigma = 20$

Sur un échantillon de 16 ampoules donne une moyenne égale à 3000 h.

On va déterminer un intervalle de confiance qui contient μ avec un risque d'erreur de 10%

ici: $\bar{X} = 3000$; $n = 16$; $\sigma = 20$; $\alpha = 0,10$

Déterminons t : $P(-t \leq T \leq t) = 1 - 0,10 = 0,9$ avec $T \sim N(0,1)$

(T.I)

$2P(T \leq t) - 1 = 0,9$

$P(T \leq t) = \frac{1,9}{2} = 0,975 \Rightarrow \text{fractnormale}(0,975; 0, 1) \approx 1,645$

donc $t \approx 1,645$

Finalement: $\left[3000 - 1,645 \times \frac{20}{\sqrt{16}} ; 3000 + 1,645 \times \frac{20}{\sqrt{16}} \right] = [2992; 3008]$

b) fréquence: idem avec $F \sim N\left(p; \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$

Propriété: L'intervalle de confiance:

$\left[F - t \sqrt{\frac{F(1-F)}{n-1}} ; F + t \sqrt{\frac{F(1-F)}{n-1}} \right]$, t coefficient de confiance.

Exemple: Dans une commune un sondage révèle que pour 42% des 500 personnes interrogées l'organisation des transports est non satisfaisante pour 42% de gens.
Que peut-on en déduire sur la population au seuil de risque de 1%?

$F = 0,42$; $n = 500$; $t \approx 2,576$

donc $[0,36; 0,48]$ il y a donc en fait entre 36% et 48% des personnes mécontentes au seuil de risque de 1%.

Ex 4 i) $p = 4\%$, $F \sim N\left(p; \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) = N\left(0,04; \sqrt{\frac{0,04 \times 0,96}{64}}\right) \approx N(0,04; 0,0245)$

1) $P(0,03 \leq F \leq 0,05) \approx 0,317$

3) $P(0,04 - a \leq F \leq 0,04 + a) = 0,95$ (T.I) $2P(F \leq 0,04 + a) - 1 = 0,95$
 $P(F \leq 0,04 + a) = \frac{1,95}{2}$
 $\text{fractnormale}(0,975; 0,04; 0,0245^2) \approx 0,08$
 $0,04 + a \approx 0,08$
 $a \approx 0,04$

$$4) P(0,03 \leq F \leq 0,05) = 0,99$$

$$F \sim \mathcal{N}\left(0,04; \sqrt{\frac{0,04 \times 0,96}{n}}\right)$$

$$P\left(\frac{-0,01}{\sqrt{\frac{0,04 \times 0,96}{n}}} \leq T \leq \frac{0,01}{\sqrt{\frac{0,04 \times 0,96}{n}}}\right) = 0,99 \quad \text{on pose}$$

$$T = \frac{F - m}{\sigma} = \frac{F - 0,04}{\sqrt{\frac{0,04 \times 0,96}{n}}}$$

$$\text{avec } T \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$$\frac{0,01}{\sqrt{\frac{0,04 \times 0,96}{n}}} \cong \frac{2,576}{1}$$

$$0,01 \cong 2,576 \times \sqrt{\frac{0,04 \times 0,96}{n}}$$

$$\frac{0,01}{2,576} \cong \sqrt{\frac{0,04 \times 0,96}{n}}$$

$$\left(\frac{0,01}{2,576}\right)^2 \cong \frac{0,04 \times 0,96}{n} \Rightarrow n \cong \frac{0,04 \times 0,96}{\frac{(0,01)^2}{2,576^2}} = \frac{0,04 \times 0,96 \times 2,576^2}{(0,01)^2}$$

$$n \cong 2548.$$

Ex6: 1) $n = 50$; $\bar{D} \sim \mathcal{N}\left(\mu; \frac{\sigma}{\sqrt{50}}\right)$, $\sigma = 0,19$ inconnu.

$\mu_e = 9,99$ et une estimation de μ .

$$2) \left[\mu_e - t \sqrt{\frac{\sigma}{n}}; \mu_e + t \sqrt{\frac{\sigma}{n}} \right] \quad 1 - \alpha = 95\% = 0,95$$

$$\rightarrow t \text{ tel que : } P(-t \leq T \leq t) = 1 - \alpha; T \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$$\textcircled{TL} \text{ fractionnaire}(0,975; 0; 1)$$

$$P(-t \leq T \leq t) = 0,95$$

$$\text{donc } t \leq 1,96$$

$$\text{et } \left[9,99 - 1,96 \times \sqrt{\frac{0,19}{50}}; 9,99 + 1,96 \times \sqrt{\frac{0,19}{50}} \right] \cong [9,937; 10,043]$$

3) $\mu \in [9,937; 10,043]$, Non car il y a un risque de 5%.

Ex 7:

1) $m_e \approx 150,1$

$\sigma_e \approx 3,051$

2) $\mu \approx m_e = 150,1$

$\sigma \approx \sigma_e \sqrt{\frac{100}{99}} \approx 3,066$

3) $\bar{P} \sim \mathcal{N}\left(150,1; \frac{3,066}{\sqrt{50}}\right) = \mathcal{N}(150,1; 0,434)$ avec $n=50$

4) $\left[150,1 - 1,96 \times \sqrt{\frac{3,066}{50}}; 150,1 + 1,96 \times \sqrt{\frac{3,066}{50}}\right]$
 $= [149,615; 150,585]$ avec $\alpha = 5\%$

avec t tel que $P(-t \leq T \leq t) = 0,95$

$T \sim \mathcal{N}(0;1)$

donc $t \approx 1,96$.

si $\alpha = 10\%$ $[149,693; 150,507]$

si $\alpha = 1\%$ $[149,462; 150,738]$

$\alpha = 10\%$ $1-\alpha = 90\%$ $t \approx 1,645$

$\alpha = 5\%$ $1-\alpha = 95\%$ $t \approx 1,96$

$\alpha = 1\%$ $1-\alpha = 99\%$ $t \approx 2,576$

Ex 8:

1) a) $p \approx 0,8$

b) $F \sim \mathcal{N}\left(p; \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) = \mathcal{N}\left(0,8; \sqrt{\frac{0,8 \times 0,2}{400}}\right)$
 $= \mathcal{N}(0,8; 0,02)$

c) $P(F < 0,78) \approx 0,159$

d) $P(0,78 < F < 0,82) \approx 0,683$

e) $\left[p - t \sqrt{\frac{p(1-p)}{n-1}}; p + t \sqrt{\frac{p(1-p)}{n-1}}\right]$ $\alpha = 5\%$

$$= \left[0,8 - 1,96 \sqrt{\frac{0,8 \times 0,2}{399}} ; 0,8 + 1,96 \sqrt{\frac{0,8 \times 0,2}{399}} \right]$$

$$= [0,761 ; 0,839] \quad \text{à un risque de 5\%}$$

$$2) \quad F_n \sim \mathcal{C}\left(p ; \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) = \mathcal{C}\left(0,8 ; \sqrt{\frac{0,16}{n}}\right)$$

$$P(0,8 - 0,02 \leq F_n \leq 0,8 + 0,02) = 0,99$$

$$T_n = \frac{F_n - 0,8}{\sqrt{\frac{0,16}{n}}} \sim \mathcal{C}(0; 1)$$

$$P\left(\frac{-0,02}{\sqrt{\frac{0,16}{n}}} \leq T_n \leq \frac{0,02}{\sqrt{\frac{0,16}{n}}}\right) = 0,99$$

$$\frac{0,02}{\sqrt{\frac{0,16}{n}}} \approx 2,576$$

$$0,02 \times \sqrt{\frac{n}{0,16}} \leq 2,576$$

$$0,02 \times \frac{\sqrt{n}}{0,4} \leq 2,576$$

$$\sqrt{n} \leq \frac{2,576 \times 0,4}{0,02}$$

$$n \leq \left(\frac{2,576 \times 0,4}{0,02}\right)^2$$

$$n \leq 2655$$

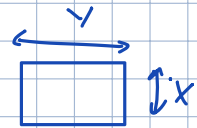
Ex BTS 2012: 1) $p \approx \frac{37}{50} = 0,74$

2) a) $\left[p - t \sqrt{\frac{p(1-p)}{n-1}} ; p + t \sqrt{\frac{p(1-p)}{n-1}} \right]$
 $= \left[0,74 - 1,96 \sqrt{\frac{0,74 \times 0,26}{49}} ; 0,74 + 1,96 \sqrt{\frac{0,74 \times 0,26}{49}} \right]$
 $\approx \left[0,617 ; 0,863 \right]$

b) Non on a un risque de 5%.

Ex BTS 2011: 1) $p \approx \frac{94}{100} = 0,94$

2) $\left[0,94 - 1,96 \sqrt{\frac{0,94 \times 0,06}{99}} ; 0,94 + 1,96 \sqrt{\frac{0,94 \times 0,06}{99}} \right]$
 $\approx \left[0,893 ; 0,984 \right]$



Ex BTS 2008:

① 1. $P(9,5 \leq X \leq 10,5) \approx 0,983 \approx 10^{-3}$

2. $P(10,5 \leq Y \leq 11,5) = 0,985$

$P(\{9,5 \leq X \leq 10,5\} \cap \{10,5 \leq Y \leq 11,5\}) = P(9,5 \leq X \leq 10,5) \times P(10,5 \leq Y \leq 11,5)$
 car X et Y sont indépendantes.
 $\approx 0,983 \times 0,985$
 $\approx 0,963 \approx 10^{-3}$

② 1) * Bernoulli: On prélève 1 pièce dans la production.
 On regarde si elle est défectueuse (succès) $P(\text{succès}) = p = 0,03$
 * On répète cette épreuve 50 fois ($n=50$) de manière indépendante (tirage avec remise)
 * Z est la variable aléatoire qui compte le nombre de succès.
 donc $Z \sim \mathcal{B}(50; 0,03)$

2) $P(Z=0) \approx 0,218$

$P(Z \leq 2) \approx 0,811$

3) a) $B\left(\begin{smallmatrix} 50; 0,03 \\ n \times p \end{smallmatrix}\right)$ est approchable par une $P(\lambda)$ avec $\lambda = 50 \times 0,03$
 $\lambda = 1,5$

b) $P(Z_1 \leq 2) \simeq 0,809 \simeq 10^{-3}$.

© 1) $f_e = \frac{96}{100} = 0,96 = p$.

2) $FNCF\left(p; \sqrt{\frac{p(1-p)}{100}}\right)$

$$I = \left[p - t \sqrt{\frac{p(1-p)}{n-1}} ; p + t \sqrt{\frac{p(1-p)}{n-1}} \right] \quad \text{avec } P(-t \leq T \leq t) = 0,95$$

$T \sim NCF(0; 1)$
donc $t \simeq 1,96$

$$I = \left[0,96 - 1,96 \sqrt{\frac{0,96 \times 0,04}{99}} ; 0,96 + 1,96 \sqrt{\frac{0,96 \times 0,04}{99}} \right]$$

$$I = [0,921 ; 0,999]$$